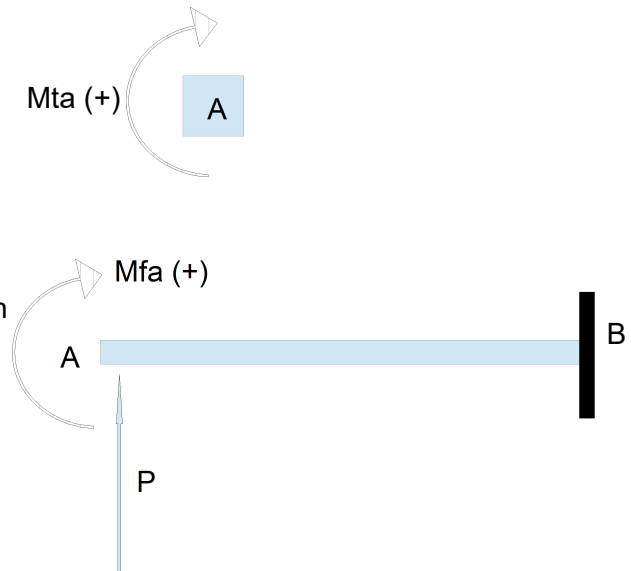


### Exercise 898 – fig 1060/a

- beam laid in horiz. Plane
- end A : free
- end B : fixed
- P : single load upwards
- Mfa : (+) when lower fibers under tension
- Mta : (+) clockwise looking at A

search : find Mf and Mt in any section S



### Exercise 899 – fig 1060/b

- same beam as ex. 898 but considering only the single load P (upwards)

search : find rotation and displacement of end A (Castigliano)

### Exercise 900 – fig 1060/c

- same beam as ex. 898 but considering only the flex moment Mfa

search : find rotation and displacement of end A (Castigliano)

### Exercise 901 – fig 1060/d

- same as ex. 898 but considering only tors moment Mta

search : find rotation and displacement of end A (Castigliano)

### Exercise 902 – fig 1061

beam configuration : end A : free  
end B : fixed  
load q : uniform, downwards

search : flex moment Mf and tors moment Mt in any section S

### Exercise 903

same as ex 902

search : displacement and rotation of end A

### Exercise 904

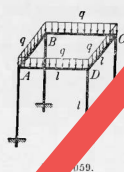
beam (same as ex 903) end A : support (hinge)  
end B : fixed  
load  $q$  : uniform, downwards

search : find the reaction in A

### Exercise 905

beam (same as ex 903) end A : fixed  
end B : fixed  
load  $q$  : uniform, downwards

search : find the reaction in A that is "A,  $M_{fa}$ ,  $M_{ta}$ "



**Esercizio 896.** — La struttura della fig. 1059 è costituita da quattro travi orizzontali di uguale lunghezza  $l$  e di sezione quadrata, solidali tra loro e con quattro piedritti della stessa lunghezza e della stessa sezione. Determinare i momenti mutui fra le varie parti, provocati da un carico uniforme  $q$  sulle quattro travi.

**Soluzione.** a) Ciascun piedritto reagisce con un momento incognito  $M$  agente nel piano verticale diagonale. La simmetria di un piedritto non si sposta; quindi la sua sezione è (314), (n. 98 b)

$$\alpha = \frac{Ml}{4EJ}$$

Il momento  $M$  si ripartisce in due momenti  $M/\sqrt{2}$  nei piani verticali delle due travi adiacenti, e che costituiscono il momento d'incastro. Le due rotazioni delle estremità adiacenti delle due travi devono avere come risultante nel piano diagonale la stessa  $\alpha$  del piedritto, per cui ciascuna di esse vale  $\alpha/\sqrt{2}$ , e si ha (275), (269)

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{ql^3}{24EJ} - \frac{(1-\frac{1}{2})l}{4EJ}$$

Pertanto, l'equazione determinata per  $M$  risulta

$$\frac{Ml}{4EJ} = \frac{\sqrt{2}ql^3}{24EJ} - \frac{1}{4EJ}, \quad \text{da cui} \quad M = \frac{\sqrt{2}}{18} ql^3.$$

Il momento d'incastro in travi è  $M/\sqrt{2} = ql^3/18$ .

Il momento alla base dei piedritti è (313)  $-M/2 = -\sqrt{2}ql^3/36$ .

La torsione è nulla nelle travi che nei piedritti.

b) Si può invece usare il principio di equivalenza (n. 492).

**Esercizio 897.** — Idem, nel caso che il telaio ABCD non sia solidale coi quattro piedritti, ma soltanto appoggiato su di essi.

**Soluzione.** In questo caso i piedritti non reagiscono con un momento. Quindi una trave s'inflette come una trave liberamente appoggiata. E ruota anch'essa intorno al proprio asse dell'angolo  $q^2/24EJ$  imputato alla flessione delle due travi adiacenti, ma liberamente, cioè senza torsione.

(\*) Ogniuna delle quattro sezioni d'angolo, secondo le diagonali AC e BD, ruota intorno alla retta baricentrica normale alla sezione stessa, in modo tale che la parte superiore della sezione si sposta verso l'interno della struttura e la parte inferiore verso l'esterno. Ciò che provoca degli accorciamenti nelle fibre superiori e degli allungamenti nelle fibre inferiori delle due travi contigue, analogamente a ciò che avviene nelle travi dell'anello del n. 491. Si potrebbe quindi pensare che si avessero conseguentemente delle componenti di compressione e di trazione, come nel caso del n. 491. Invece queste tensioni sono nulle, perché gli accorciamenti e gli allungamenti suddetti sono quelli stessi che corrispondono alla flessione cui sono appunto soggette le travi.

**Esercizio 898.** — La trave ad asse circolare della fig. 1060 a), disposta in un piano orizzontale, dell'apertura di  $90^\circ$  e di sezione costante, incastrata in B e libera in A, è soggetta in A alla forza verticale  $P$  (rivolta in alto) e alle coppie  $M_A, M_A$ . Determinare il momento flettente  $M_r$  e il momento torcente  $M_t$  in una sezione generica S.

**Soluzione.** Sia  $\omega$  l'angolo che definisce la sezione generica S.

Consideriamo  $M_r$  positivo se tende le fibre situate al disotto del piano della figura, ed  $M_t$  positivo se viene trasmesso da AS a SB in senso destrogiro guardando la S da A verso B. Le distanze della forza  $P$  dal piano di S e dalla tangente in S sono  $r \sin \omega$  ed  $r(1 - \cos \omega)$ . I momenti  $M_r$  ed  $M_t$  dovuti alle coppie  $M_A$  ed  $M_A$  sono dati dalle componenti di queste nel piano verticale normale a S e nel piano di S. Quindi si ottiene

$$\begin{cases} M_r = Pr \sin \omega + M_A \cos \omega + M_A \sin \omega \\ M_t = -Pr(1 - \cos \omega) - M_A \sin \omega + M_A \cos \omega. \end{cases} \quad (740)$$

**Esercizio 899.** — Determinare lo spostamento e le rotazioni dell'estremità A soggetta alla forza  $P$  rivolta in alto (fig. 1060 b).

**Soluzione.** Applichiamo il teorema di Castigliano nella forma semplificata (n. 340 c) (ossia il teorema dei lavori virtuali, n. 340 d). I momenti effettivi si ottengono annullando  $M_A$  ed  $M_A$  nelle (740); i momenti fittizi si ottengono ponendo  $P = 1$ , o  $M_A = 1$ , o  $M_A = 1$  nelle (740). Quindi, per la (500), risulta ( $ds = r d\omega$ )

$$\begin{aligned} (741) \quad \zeta_a &= \frac{1}{B} \int_0^{\pi/2} Pr \sin \omega \cdot r \sin \omega \cdot r d\omega + \frac{1}{C} \int_0^{\pi/2} Pr(1 - \cos \omega) \cdot r(1 - \cos \omega) \cdot r d\omega = \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{Pr^3}{B} + \frac{3\pi - 8}{4} \cdot \frac{Pr^3}{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (742) \quad \varphi_a &= \frac{1}{B} \int_0^{\pi/2} Pr \sin \omega \cdot \cos \omega \cdot r d\omega + \frac{1}{C} \int_0^{\pi/2} Pr(1 - \cos \omega) \cdot \sin \omega \cdot r d\omega = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{Pr^2}{B} + \frac{1}{2} \cdot \frac{Pr^2}{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (743) \quad \theta_a &= \frac{1}{B} \int_0^{\pi/2} Pr \sin \omega \cdot \sin \omega \cdot r d\omega - \frac{1}{C} \int_0^{\pi/2} Pr(1 - \cos \omega) \cdot \cos \omega \cdot r d\omega = \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{Pr^2}{B} - \frac{4 - \pi}{4} \cdot \frac{Pr^2}{C}. \end{aligned}$$

Lo spostamento  $\zeta_a$  e le rotazioni  $\varphi_a, \theta_a$  sono positivi negli stessi versi assunti positivi per  $P, M_r, M_t$  (cs. 898). Risulta  $\theta_a \geq 0$  secondo che  $\gamma = B/C \geq \pi : (4 - \pi) = 3,66$  (nota 1).

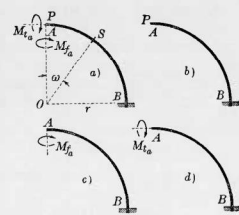


Fig. 1060.

**Esercizio 900.** - Determinare lo spostamento e le rotazioni dell'estremità  $A$  soggetta alla coppia  $M_a$  (fig. 1060 c).

*Soluzione.* Si procede come nell'esercizio 899:

$$(744) \quad \zeta_a = \frac{1}{B} \int_0^{\pi/2} M_{ta} \cos \omega \cdot r \sin \omega \cdot r d\omega + \frac{1}{C} \int_0^{\pi/2} M_{ta} \sin \omega \cdot r(1 - \cos \omega) \cdot r d\omega = \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_a r^2}{B} + \frac{1}{2} \cdot \frac{M_a r^2}{C}$$

$$(745) \quad \varphi_a = \frac{1}{B} \int_0^{\pi/2} M_{ta} \cos \omega \cdot \cos \omega \cdot r d\omega + \frac{1}{C} \int_0^{\pi/2} M_{ta} \sin \omega \cdot \sin \omega \cdot r d\omega = \\ = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{M_a r}{B} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{M_a r}{C}$$

$$(746) \quad \theta_a = \frac{1}{B} \int_0^{\pi/2} M_{ta} \cos \omega \cdot \sin \omega \cdot r d\omega - \frac{1}{C} \int_0^{\pi/2} M_{ta} \sin \omega \cdot \cos \omega \cdot r d\omega = \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_a r}{B} - \frac{1}{2} \cdot \frac{M_a r}{C}$$

La rotazione  $\theta_a$  è generalmente negativa, perchè nella maggior parte dei casi è  $C < B$  (nota 1). Se invece è  $C > B$ , risulta  $\theta_a > 0$ .

**Esercizio 901.** - Determinare lo spostamento e le rotazioni dell'estremità  $A$  soggetta alla coppia  $M_a$  (fig. 1060 d).

*Soluzione.* Si procede come nell'esercizio 899:

$$(747) \quad \zeta_a = \frac{1}{B} \int_0^{\pi/2} M_{ta} \sin \omega \cdot r \sin \omega \cdot r d\omega - \frac{1}{C} \int_0^{\pi/2} M_{ta} \cos \omega \cdot r(1 - \cos \omega) \cdot r d\omega = \\ = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{M_a r^2}{B} - \frac{4 - \pi}{4} \cdot \frac{M_a r^2}{C}$$

$$(748) \quad \varphi_a = \frac{1}{B} \int_0^{\pi/2} M_{ta} \sin \omega \cdot \cos \omega \cdot r d\omega - \frac{1}{C} \int_0^{\pi/2} M_{ta} \cos \omega \cdot \sin \omega \cdot r d\omega = \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_a r}{B} - \frac{1}{2} \cdot \frac{M_a r}{C}$$

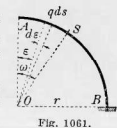
$$(749) \quad \theta_a = \frac{1}{B} \int_0^{\pi/2} M_{ta} \sin \omega \cdot \sin \omega \cdot r d\omega + \frac{1}{C} \int_0^{\pi/2} M_{ta} \cos \omega \cdot \cos \omega \cdot r d\omega = \\ = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{M_a r}{B} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{M_a r}{C}$$

La rotazione  $\varphi_a$  è generalmente negativa, perchè nella maggior parte dei casi è  $C < B$  (nota 1). Se invece è  $C > B$ , risulta  $\varphi_a > 0$ . Inoltre risulta  $\zeta_a \geq 0$  secondo che  $\gamma = B/C \leq 3,66$  (Maxwell, es. 899).

Se si confrontano la (742) e la (744), la (743) e la (747), la (746) e la (748), si riconosce che il teorema di Maxwell (n. 335) è soddisfatto.

**Esercizio 902.** - La trave ad asse circolare dell'esercizio 898 è soggetta a un carico verticale uniforme  $q$  rivolto in basso (fig. 1061). Determinare i momenti  $M_f$  ed  $M_t$  in una sezione generica  $S$ .

*Soluzione.* Consideriamo un carico elementare  $qds = qrd\varepsilon$  che preceda la sezione  $S$  presa in esame. Esso provoca in  $S$  i momenti elementari



$$dM_f = -qrd\varepsilon \cdot r \sin(\omega - \varepsilon), \quad dM_t = qrd\varepsilon \cdot r[1 - \cos(\omega - \varepsilon)].$$

Quindi i momenti complessivi in  $S$  risultano

$$(750) \quad \begin{cases} M_f = \int_0^\omega -qr^2 \sin(\omega - \varepsilon) d\varepsilon = -qr^2(1 - \cos \omega) \\ M_t = \int_0^\omega qr^2[1 - \cos(\omega - \varepsilon)] d\varepsilon = qr^2(\omega - \sin \omega). \end{cases}$$

Nella sezione  $B$  d'incastro si hanno i valori massimi

$$M_f = -qr^2, \quad M_t = \frac{\pi - 2}{2} qr^2.$$

Questi ultimi valori si potevano ottenere direttamente, essendo  $q\pi r/2$  il carico totale e  $(17) \ 2r/\pi$ ,  $r - 2r/\pi$  le distanze della sua risultante dal piano della sezione  $B$  e dalla tangente in  $B$ .

**Esercizio 903.** - Idem. Determinare lo spostamento e le rotazioni dell'estremità  $A$ .

*Soluzione.* Procediamo come negli esercizi 899-901, utilizzando le sollecitazioni reali (750) e le stesse sollecitazioni fittizie usate negli esercizi suddetti (con  $P = 1$  ed  $M_a = 1$  di verso cambiato, per ottenere  $\zeta_a$  e  $\varphi_a$  espressi da numeri positivi):

$$(751) \quad \zeta_a = \frac{1}{B} \int_0^{\pi/2} qr^2(1 - \cos \omega) \cdot r \sin \omega \cdot r d\omega + \frac{1}{C} \int_0^{\pi/2} qr^2(\omega - \sin \omega) \cdot r(1 - \cos \omega) \cdot r d\omega = \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{qr^4}{B} + \frac{\pi^2 - 4\pi + 4}{8} \cdot \frac{qr^4}{C}$$

$$(752) \quad \varphi_a = \frac{1}{B} \int_0^{\pi/2} qr^2(1 - \cos \omega) \cdot \cos \omega \cdot r d\omega + \frac{1}{C} \int_0^{\pi/2} qr^2(\omega - \sin \omega) \cdot \sin \omega \cdot r d\omega = \\ = \frac{4 - \pi}{4} \cdot \frac{qr^3}{B} + \frac{4 - \pi}{4} \cdot \frac{qr^3}{C}$$

$$(753) \quad \theta_a = -\frac{1}{B} \int_0^{\pi/2} qr^2(1 - \cos \omega) \cdot \sin \omega \cdot r d\omega + \frac{1}{C} \int_0^{\pi/2} qr^2(\omega - \sin \omega) \cdot \cos \omega \cdot r d\omega = \\ = -\frac{1}{2} \cdot \frac{qr^3}{B} + \frac{\pi - 3}{2} \cdot \frac{qr^3}{C}$$

L'angolo  $\theta_a$  è positivo soltanto se  $\gamma > 1 : (\pi - 3) = 7,96$ .

**Esercizio 904.** — La stessa trave, caricata uniformemente, è incastrata in  $B$  e appoggiata in  $A$ . Determinare la reazione dell'appoggio  $A$ .

**Soluzione.** Basta annullare l'abbassamento  $\zeta_a$  complessivo, provocato dal carico  $q$  e dalla reazione  $A$  incognita (751), (741):

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{qr^3}{B} + \frac{\pi^2 - 4\pi + 4}{8} \cdot \frac{qr^3}{C} - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{Ar^3}{B} - \frac{3\pi - 8}{4} \cdot \frac{Ar^3}{C} = 0;$$

da cui

$$A = \frac{4 + (\pi^2 - 4\pi + 4)\gamma}{2\pi + 2(3\pi - 8)\gamma} qr. \quad \left(\gamma = \frac{B}{C}\right)$$

Ad es., se la sezione è circolare e se  $m = 4$ , risulta

$$A = 0,698qr = 0,444q\pi r/2 = 0,444Q.$$

Le sollecitazioni  $M_x$  ed  $M_y$  in una sezione qualunque si ottengono sovrapponendo le (750) e le (740) calcolate per  $P = A$ .

**Esercizio 905.** — Idem, incastrata in  $A$  e in  $B$  in modo completo.

**Soluzione.** Dette  $X, Y, Z$  le tre componenti  $A, M_x, M_y$  (fig. 1060 a) della reazione dell'incastro  $A$ , esse sono determinate dalle condizioni di annullare lo spostamento  $\zeta_a$  e le rotazioni  $\varphi_a$  e  $\theta_a$  provocati dal carico  $q$ . Se si pone per brevità  $B/C = \gamma$ , utilizzando le (741)-(749) e le (751)-(753) si ottengono le tre equazioni (nel caso generale; invece nel nostro caso si hanno due equazioni con due incognite, perchè  $X$  è nota e vale  $q\pi r/4$ )

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2 - 4\pi + 4}{8}\gamma\right)qr^2 - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi - 8}{4}\gamma\right)Xr - \frac{1}{2}(1 + \gamma)Y - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{4 - \pi}{4}\gamma\right)Z &= 0 \\ \frac{4 - \pi}{4}(1 + \gamma)qr^2 - \frac{1}{2}(1 + \gamma)Xr - \frac{\pi}{4}(1 + \gamma)Y - \frac{1}{2}(1 - \gamma)Z &= 0 \\ \left(-\frac{1}{2} + \frac{\pi - 3}{2}\gamma\right)qr^2 - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{4 - \pi}{4}\gamma\right)Xr - \frac{1}{2}(1 - \gamma)Y - \frac{\pi}{4}(1 + \gamma)Z &= 0. \end{aligned}$$

Ottenuti i valori di  $X, Y, Z$ , si possono calcolare  $M_x$  ed  $M_y$  in una sezione qualunque sovrapponendo le (750) e le (740).

#### 490. I portali soggetti a forze e a coppie normali al loro piano.

Spesso un portale è soggetto all'azione di forze e di coppie agenti normalmente al suo piano, che possono provenire sia dal vento che da spinte statiche agenti frontalmente su una mensola o da altri membri collegati col portale, sia da linee di trasmissione di forze. Rientrano in questa categoria anche le travi di balcone costituite da due tratti poggianti dal muro e normali a quest'ultimo e da un tratto poggioso al muro.

La determinazione delle reazioni sovrabbondanti non presenta difficoltà, dopo quanto si è visto negli esercizi 891-893. Tuttavia può essere preferibile un metodo generale che fornisca espressioni di tali

incognite per una condizione qualsiasi di carico. Per evitare sviluppi troppo lunghi, ci limiteremo a studiare il portale semplice simmetrico (\*).

a) *Le condizioni di congruenza.* Consideriamo un portale semplice simmetrico, comunque caricato sia sulla trave che sui piedritti con forze e da coppie agenti normalmente al suo piano. I piedritti siano vincolati al suolo con incastri (che possono anche essere delle cerniere cilindriche con l'asse normale al piano del portale, n. 488 c).

Pensiamo di svincolare la trave dai piedritti e di applicare alle estremità della trave e alle sommità dei piedritti le reazioni multiple equivalenti ai vincoli soppressi. Tali reazioni (fig. 1062) sono in genere due forze  $H_a, H_b$  normali al piano del portale e due coppie  $M_a, M_b$  in un piano orizzontale (illeggi per la trave e torcenti per i piedritti) e due coppie  $\Theta_a, \Theta_b$  in piani normali al piano della trave (torcenti per la trave e flettenti per i piedritti). Assumiamo come incognite sovrabbondanti  $M_a, M_b, \Theta_a$ .

Siano  $B_1$  la rigidezza a flessione della trave (nel piano normale a quello del portale) e  $C_1$  la rigidezza a torsione;  $B_2, C_2$  le analoghe rigidezze dei piedritti.

Indichiamo con  $\theta'$  l'angolo di torsione della sezione  $A$  svincolata della trave, rispetto alla sezione  $B$ , a meno del fattore  $1/C_1$ , per effetto soltanto delle eventuali coppie torcenti esterne agenti sulla trave (positivo se destregio guardando da  $A$  verso  $B$ ); con  $\varphi'_a, \varphi'_b$  gli angoli di flessione delle sommità svincolate dei piedritti, a meno del fattore  $h/B_2$ , per effetto delle sole forze esterne agenti sui piedritti (positivi se sinistreggi guardando da  $A$  verso  $B$ ); con  $\delta'_a, \delta'_b$  gli spostamenti delle sommità svincolate dei piedritti, a meno del fattore  $h^2/2B_2$ , per effetto delle sole forze esterne suddette (positivo se in dentro rispetto al piano della fig. 1062); con  $\theta'_a, \theta'_b$  gli angoli di torsione delle sommità svincolate dei piedritti, a meno del fattore  $h/C_2$ , per effetto delle eventuali coppie torcenti esterne agenti sui piedritti (positivi se destregio guardando dall'alto). Le quantità  $\theta', \varphi'_a, \varphi'_b, \delta'_a, \delta'_b, \theta'_a, \theta'_b$  hanno le dimensioni di un momento, e la loro determinazione non presenta difficoltà (es. 906).

Gli angoli effettivi di torsione delle sommità dei piedritti sono

$$(a) \quad \theta_a = \frac{1}{C_2} (M_a + \Theta'_a), \quad \theta_b = \frac{1}{C_2} (-M_b + \Theta'_b).$$

La trave  $AB$  è soggetta in un piano orizzontale, e gli angoli cui ruotano le sezioni estreme sono espressi da (336), (n. 235 e)

$$(b) \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{6B_1} [2(M_a - \bar{M}_a) + (M_b - \bar{M}_b)] + \frac{1}{l} (\delta'_a - \delta'_b) \\ \beta &= \frac{1}{6B_1} [(M_a - \bar{M}_a) + 2(M_b - \bar{M}_b)] - \frac{1}{l} (\delta'_a - \delta'_b), \end{aligned}$$

(\*) Il portale non simmetrico e per il portale multiplo si veda O. BELLUZZI: *Sui calcoli dei portali soggetti a forze e a coppie spaziali*, «Ann. d. Lav. Pubbl.», 1928, n. 3; *Formule per il calcolo dei portali incastriati*, pagg. 26-37 e 349-367. Bologna, Zanichelli, 1930.